

Corso Zero Matematica CdL Scienze Biologiche

Richiamo - Fisso $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a \in \mathbb{R}$

Studiamo l'eqne $x^n = a$

Caso $(n \text{ pari})$

- Se $a < 0$ l'eqne non ammette soluzioni.
 In particolare, non ha senso $\sqrt[n]{a}$ con $a < 0$
- Se $a \geq 0$ si ha che l'eqne $x^n = a$ ammette
 Unica soluzione $x = \sqrt[n]{a} \geq 0$

Caso $(n \text{ dispari})$ si ha che $\sqrt[n]{a}$ ha sempre senso
 qualunque sia il segno di $a \in \mathbb{R}$

Proprietà (1) $(n \text{ pari})$ $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$
 (con $\underline{a \geq 0}$ ma anche $\underline{b \geq 0}$)

(2) $(n \text{ dispari})$ $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a^n = b$

Proprietà: (1) $(n \text{ pari})$ $\sqrt[n]{a} \leq b \Leftrightarrow a \leq b^n$
 (con $\underline{a \geq 0}$ ma anche $\underline{b \geq 0}$)

(2) $(n \text{ dispari})$ $\sqrt[n]{a} \leq b \Leftrightarrow a \leq b^n$

Le proprietà sopra usano la definizione $(\sqrt[n]{a})^n = a$

Equazione Irrazionale

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$$

Dove $f(x)$ e $g(x)$ sono espressioni polinomiali oppure rapporto fra essi.

Caso $(n \text{ dispari})$ basta elevare ambo i membri
 alla n , per ottenere

$$f(x) = g(x)^n$$

alla n , per ottenere

$$f(x) = [g(x)]^n$$

equa che sappiamo risolvere.

caso n pari In tal caso è posibile un campo di esistenza

$$CE = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\} = A$$

Divido CE in due

$$A = \underbrace{\{x \in A : g(x) < 0\}}_{A_1} \cup \underbrace{\{x \in A : g(x) \geq 0\}}_{A_2}$$

Deduciamo da subito che $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ non ha soluzioni in A_1

Allora si cercano soluzioni solo in A_2

In tale insieme posso elevare ambo i membri alla n (pari) per ottenere

$$f(x) = [g(x)]^n$$

Disuguaglianze Irrazionali

$$\sqrt[n]{f(x)} \leq g(x)$$

caso n dispari basta elevare ambo i membri alla n

$$\sqrt[n]{f(x)} \leq g(x) \iff f(x) \leq [g(x)]^n$$

caso n pari In tal caso ho un campo di esistenza

$$CE \quad A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\}$$

Come per le eqⁿⁱ,

$$A = \underbrace{\{x \in A : g(x) < 0\}}_{A_1} \cup \underbrace{\{x \in A : g(x) \geq 0\}}_{A_2}$$

$\sqrt[n]{f(x)} \leq g(x)$ non ammette soluzioni in A_1 , poiché
primo membro positivo non può essere più piccolo del
2° membro negativo

Allora studio la diseg. in A_2

$$\sqrt[n]{f(x)} \leq g(x) \iff f(x) \leq [g(x)]^n$$

e trovo soluzioni in A_2

Studiamo $\sqrt[n]{f(x)} \geq g(x)$

caso n dispari basta elevare ambo i membri alla n

$$\sqrt[n]{f(x)} \geq g(x) \iff f(x) \geq [g(x)]^n$$

caso n pari Ho un campo di esistenza

CE $A = \{x \in A : f(x) \geq 0\}$

$$A = \underbrace{\{x \in A : g(x) < 0\}}_{A_1} \cup \underbrace{\{x \in A : g(x) \geq 0\}}_{A_2}$$

In A_1 $\sqrt[n]{f(x)} \geq g(x)$ è banalmente soddisfatta
perché $\sqrt[n]{f(x)}$ è positivo sarà automaticamente più grande
di $g(x)$ negativo

Infine, cerco soluzioni in A_2 . In tale insieme

$$\sqrt[n]{f(x)} \geq g(x) \iff f(x) \geq [g(x)]^n$$

Trovo le soluzioni $B \subseteq A_2$ di $f(x) \geq [g(x)]^n$

e concludo dicendo che le soluzioni finali di

$$\sqrt[n]{f(x)} \geq g(x) \text{ sono } A_1 \cup B$$

Esercizio $\sqrt[3]{x^3+13} = x+1$

elevo ambo i membri al cubo

$$x^3+13 = (x+1)^3$$

$$x^3+13 = (x+1) \cdot (x+1)^2$$

$$x^3+13 = (x+1)(x^2+2x+1)$$

$$\cancel{x^3}+13 = \cancel{x^3}+\underline{2x^2}+x+\underline{x^2}+2x+1$$

$$13 = 3x^2+3x+1$$

$$3x^2 + 3x - 18 = 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Delta = 1^2 + 24 = 5^2 \Rightarrow x_1 = \frac{-1-5}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-1+5}{2} = 2$$

Sol $x = -3, 2$

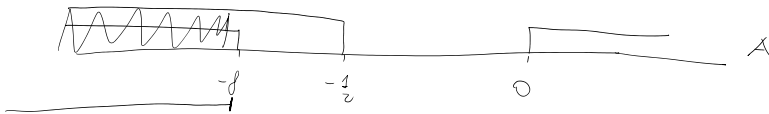
Esercizio $\sqrt{x^2 + 8x} \geq 2x + 1$

CE : $x^2 + 8x \geq 0 \Leftrightarrow x(x+8) \geq 0$

$$x_1 = 0, x_2 = -8$$

CE : $A =]-\infty, -8] \cup [0, +\infty[$

In A studio $2x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$



Conclusione 1 se $x \in]-\infty, -8]$ $\Rightarrow \sqrt{x^2 + 8x} \geq 2x + 1$ e
soddisfatta

ossia $]-\infty, -8]$ fa parte dell'insieme delle soluzioni

In $[0, +\infty[$ studio $\sqrt{x^2 + 8x} \geq 2x + 1$ ha senso
elevare ambo i membri al quadrato

$$x^2 + 8x \geq (2x + 1)^2$$

$$x^2 + 8x \geq 4x^2 + 4x + 1$$

$$-4x^2 + x^2 - 4x + 8x - 1 \geq 0$$

$$-3x^2 + 4x - 1 \geq 0$$

$$3x^2 - 4x + 1 \leq 0$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4 = 2^2$$

$$x_1 = \frac{4-2}{6}$$

$$x_2 = \frac{4+2}{6}$$

$$x_1 = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = 1$$

$$B = \left[\frac{1}{3}, 1\right] \cap [0, +\infty[= \left[\frac{1}{3}, 1\right]$$

Conclusione

$$\underline{\text{Sol}} \quad]-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{3}, 1\right]$$

Esercizio

$$\sqrt{x^2 - 5x + 6} > x + 1$$

$$CE \quad x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

$$x_1 = \frac{5-1}{2}$$

$$x_2 = \frac{5+1}{2}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 3$$

$$CE \quad]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$$

Per poter elevare ambo i membri al quadrato ho bisogno di conoscere il segno del 2° membro

$$\text{In CE} \quad x+1 < 0 \quad (\Rightarrow) \quad x < -1$$

$$\text{con } x \in]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$$



Deduco che $]-\infty, -1[$ fa parte dell'insieme delle soluzioni

$$\text{Se } x \in]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[\text{ con } \boxed{x \geq -1}$$

$$(\text{ossia } x \in [-1, 2] \cup [3, +\infty[)$$

Allora ho senso elevare ambo i membri al quadrato per avere

$$x^2 - 5x + 6 > (x+1)^2$$

$$\cancel{x^2} - 5x + 6 > \cancel{x^2} + 2x + 1$$

$$-5x + 6 - 2x - 1 > 0$$

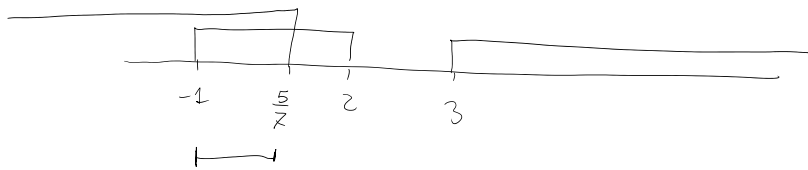
$$-7x + 5 > 0 \quad (\Rightarrow) \quad -7x > -5$$

$$(\Rightarrow) \quad 7x < 5$$

$$(\Rightarrow) \quad \boxed{x < \frac{5}{7}}$$

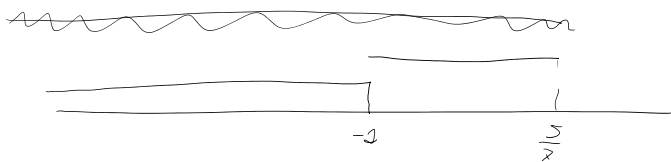
$$\Rightarrow x < \frac{5}{2}$$

Due perché $x < \frac{5}{2}$ che stanno in $[-1, 2] \cup [3, +\infty)$



$$\Rightarrow \text{Sol} = [-1, \frac{5}{2}]$$

Conclusione : $\text{Sol} =]-\infty, -1] \cup [-1, \frac{5}{2}]$
 $=]-\infty, \frac{5}{2}]$



Esercizio 1 $\frac{1}{2}x - \frac{1}{8} < 0$

$$\frac{1}{2}x < \frac{1}{8}$$

$$x < \frac{1}{4} \quad (\Rightarrow) \quad x < \frac{1}{4}$$

$$\text{Sol} \quad]-\infty, \frac{1}{4}]$$

Esercizio 2 $\frac{x^2 - 2}{4} < \frac{x}{4}$

$$x^2 - 2 < x$$

$$x^2 - x - 2 < 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 3^2$$

$$x_1 = \frac{1 - 3}{2}$$

$$x_2 = \frac{1 + 3}{2}$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 2$$

$$\text{Sol }]-1, 2[$$

Esercizio 3

$$\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x} < 1 + \frac{1}{4-x^2}$$

$$\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x} - 1 - \frac{1}{4-x^2} < 0$$

035 $4-x^2 = (2+x)(2-x)$

$$\frac{(\cancel{2-x}) + (\cancel{2+x}) - (\cancel{2+x})(\cancel{2-x}) - 1}{(2+x)(2-x)} < 0$$

$$\frac{\cancel{4} - \cancel{4} + \cancel{2x} - \cancel{2x} + x^2 - 1}{(2+x)(2-x)} < 0$$

$$\frac{x^2 - 1}{(2+x)(2-x)} < 0 \quad \leftarrow \text{Segni discord.}$$

CE $x \neq \pm 2$

Segno numeratore

$$x^2 - 1 > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x < -1 \cup x > 1$$

$x_1 = -1, x_2 = 1$

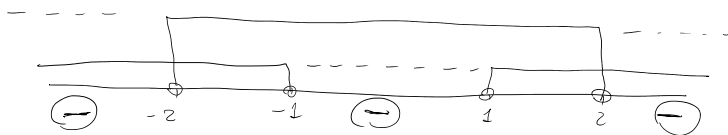
Segno denominatore

$$(2+x)(2-x) > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad 4 - x^2 > 0$$

$$x_1 = -2, x_2 = 2 \quad (\Leftrightarrow) \quad x^2 - 4 < 0$$

$(\Leftrightarrow) \quad -2 < x < 2$

Grafico



Sol $] -\infty, -2[\cup] -1, 1[\cup] 1, 2[\cup] 2, +\infty[$

Esercizio 5

$$\sqrt{2-x+(x-1)^2} + 2x-1 = 0$$

$$CE \quad 2-x+(x-1)^2 \geq 0$$

$$2-x+x^2-2x+1 \geq 0$$

$$x^2-3x+3 \geq 0$$

sempre

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -3 < 0$$

$$CE = \mathbb{R}$$

$$\sqrt{x^2-3x+3} = 1-2x$$

$$\text{se } 1-2x < 0 \Rightarrow \text{No Sol!!!}$$

ossia $x > \frac{1}{2}$ quindi escluso soluzioni più grandi di $\frac{1}{2}$!!!

Se invece $x \leq \frac{1}{2}$ posso elevare ambo i membri al quadrato

$$x^2-3x+3 = (1-2x)^2$$

$$x^2-3x+3 = 4x^2-4x+1$$

$$x^2-4x^2-3x+4x+3-1 = 0$$

$$-3x^2+x+2 = 0$$

$$3x^2-x-2 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 5^2$$

$$x_1 = \frac{1-5}{6}$$

$$x_2 = \frac{1+5}{6}$$

$$x_1 = -\frac{2}{3}$$

$$x_2 = 1 \quad (\text{poiché siamo } x \leq \frac{1}{2})$$

$$\underline{\underline{\text{Sol}}} \quad x = -\frac{2}{3}$$

Esponenziale

$$\text{Sia } a \in \mathbb{R} \text{ con } a > 0$$

Sappiamo che se $n \in \mathbb{N}$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{-volte}}$$

se invece $n \in \mathbb{Z}$

$$a^n = \begin{cases} a^n & \text{se } n \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N}) \\ \frac{1}{a^{-n}} & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

$$\text{se } q \in \mathbb{Q} \Rightarrow q = \frac{n}{m} \text{ con}$$

$$n \in \mathbb{Z} \quad m \in \mathbb{N} \quad m \neq 0$$

Definiamo

$$\begin{aligned} a^q &= a^{\frac{n}{m}} := \left(\sqrt[m]{a} \right)^n \\ &= \left(\sqrt[m]{a^n} \right) \end{aligned}$$

Oss Ho potuto farlo perché devo considerare $\sqrt[m]{a}$
per qualche $m \in \mathbb{N}$ $m \neq 0$

Escludo $a=0$ perché 0^0 non ha senso

caso a^x con $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Sia } x = C, C_1 C_2 C_3 \dots$$

Considero i seguenti numeri:

$$a, \quad a^{C_1 C_2}, \quad a^{C_1 C_2 C_3}, \quad \dots, \quad a^{C_1 C_2 C_3 \dots C_k}$$

Tali numeri hanno senso perché all'esponente c'è un numero razionale (rappresentazione decimale finita!)

Nota che tutti questi numeri, definitivamente (a meno di un numero finito di tali numeri) hanno

stessa cifra intera, stessa prima cifra decimale,

stessa seconda cifra decimale, ...

Ossia

$$a^c = M^0, M_1^0 M_2^0 M_3^0 \dots$$

$$a^{c,q} = M^1, M_1^1 M_2^1 M_3^1 M_4^1 \dots$$

$$a^{c,q,q} = M^2, M_1^2 M_2^2 M_3^2 M_4^2 M_5^2 \dots$$

...

tutti uguali
a uno delle prime cifre

$$M^i = M \quad \forall i \geq 0$$

Analogamente per la colonna "prime cifre decimali"

$$M_1^i = M_1 \quad \forall i \geq 0$$

e così via - Nasce quindi il numero reale

$$a^x = M, M_1 M_2 M_3 \dots$$

Proprietà esponenziale -

Proprietà (algebriche)

$$(1) \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad (a > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R})$$

$$(2) \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad // \quad //$$

$$(3) \quad a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x \quad (\text{con } a, b > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R})$$

$$(4) \quad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x \quad // \quad //$$

$$(5) \quad a^0 = 1$$

$$(6) \quad 1^x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Importante per le equazioni:

$$\boxed{f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)}$$

Proprietà (per disequazioni)

$$(1) a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Caso $0 < a < 1$

$$(2) a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$$

Caso $a > 1$

$$(3) a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$$

Proprietà
di Monotonia

Esercizio

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 4$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$\text{monotonia} \Rightarrow \boxed{x < -2}$$

$$\text{Ricordo } a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{ossia } \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2^2$$

Stesso esercizio

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 4$$

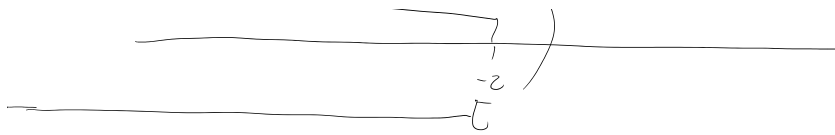
$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2^2$$

$$2^{-x} > 2^2$$

$$-x > 2 \Leftrightarrow \boxed{x < -2}$$

Sol $]-\infty, -2[$





Esercizio

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\left|\frac{x^2-x}{x+2}\right|} \geq \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\left|\frac{x^2-x}{x+2}\right|} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\left|\frac{x^2-x}{x+2}\right| \leq 3$$

CE $x \neq -2$

Studio

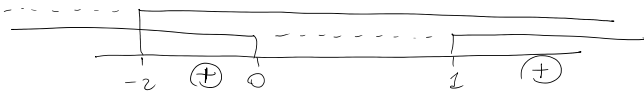
Segni concordi.

$$\frac{x^2-x}{x+2} \geq 0$$

$$x^2 - x \geq 0 \quad (\Rightarrow) \quad x(x-1) \geq 0 \quad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{matrix}$$

$$(\Rightarrow) \quad x \leq 0 \cup x \geq 1$$

$$x+2 > 0 \quad (\Rightarrow) \quad x > -2$$



Posso fare la biforcazione, ossia esplorare il valore assoluto

vincolo 1) $x \in]-2, 0] \cup [1, +\infty[$

$$\frac{x^2-x}{x+2} \leq 3$$

$$- \frac{x^2-x}{x+2} \leq 3$$

vincolo 2) $x \in]-\infty, -2[\cup]0, 1[$